УДК 517.958:537.8

В. Т. ЕРОФЕЕНКО

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА КОМПОЗИЦИОННЫХ ЭКРАНАХ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Белорусский государственный университет

(*Поступила в редакцию 24.06.2009*)

Композитные материалы специальных типов находят широкое применение в различных областях оптики и радиотехники. В последнее время значительное внимание уделяется исследованию электромагнитных волн, распространяющихся в киральных, биизотропных средах и метаматериалах [1–3]. Важными элементами технических устройств являются плоские экраны и тонкие слоистые покрытия, выполненные из композитных материалов. Такие устройства служат для создания защитных экранов с требуемыми отражательными свойствами. Для математического описания таких технических элементов используются уравнения Максвелла специального вида, а для математических формулировок краевых задач разрабатываются модели граничных условий сопряжения, связывающих электромагнитные поля по обе стороны экрана [4–7]. Заметим, что большинство граничных условий, разработанных в литературе, относятся к плоским полям, моделирующим поля источников, расположенных на больших расстояниях от исследуемых объектов. В случае источников, расположенных возле экранов, электродинамические задачи усложняются и требуют разработки более эффективных математических моделей.

В данной работе получены граничные условия сопряжения для электромагнитных полей, создаваемых источниками, расположенными на малых расстояниях от плоских композиционных экранов. Такие условия позволяют сформулировать краевые задачи и формализовать решение задачи проникновения высокочастотных полей источников через композиционные экраны с произвольными комплексными параметрами.

1. Базисные цилиндрические электромагнитные поля в композитных средах. Рассмотрим пространство R^3, заполненное однородной композитной средой, характеризуемой комплексными диэлектрической и магнитной проницаемостями ε, μ и комплексными параметрами киральности G, Z. Электромагнитное поле $\vec{E}, \vec{H}$, распространяющееся в такой среде, подчиняется уравнениям Максвелла.

$$\operatorname{rot}\vec{E} = i\omega\left(\mu\vec{H} + Z\vec{E}\right),\ \operatorname{rot}\vec{H} = -i\omega\left(\varepsilon\vec{E} + G\vec{H}\right), \tag{1}$$

где ω – круговая частота поля; ε, μ, G, Z – const.

Полная система базисных электромагнитных полей в цилиндрических координатах ρ, φ, z, удовлетворяющих уравнениям Максвелла (1), выражается через функции Бесселя [8]:

$$\vec{E} = \vec{K}_m^{(\mp j)}\left(\rho,\varphi,z;\lambda\right),\ \vec{H} = \frac{p_j}{\xi_0}\vec{K}_m^{(\mp j)}\left(\rho,\varphi,z;\lambda\right), \tag{2}$$

где $j = 1,2$; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $\lambda \in C$ – множество комплексных чисел.

$$\vec{K}_m^{(\mp j)}\left(\rho,\varphi,z;\lambda\right) = \vec{U}_m^{(\mp 2)}\left(j\right) - q_j\vec{U}_m^{(\mp 1)}\left(j\right), \quad j = 1,2, \tag{3}$$

$$\vec{U}_m^{(\mp1)}(j)=\vec{M}_m^{(\mp1)}(\rho,\varphi,z;\lambda,k_j)=\vec{V}_m^{(1)}(\lambda\rho)\exp(im\varphi\mp k_0 v_j z),$$
$$\vec{U}_m^{(\mp2)}(j)=\vec{M}_m^{(\mp2)}(\rho,\varphi,z;\lambda,k_j)=\left(\mp l_j\vec{V}_m^{(2)}(\lambda\rho)+\frac{\bar{\lambda}}{k_j}J_m(\lambda\rho)\vec{e}_z\right)\exp(im\varphi\mp k_0 v_j z),$$
$$\vec{V}_1=\vec{V}_m^{(1)}=\frac{im}{\lambda\rho}J_m(\lambda\rho)\vec{e}_\rho-J_m^{'}(\lambda\rho)\vec{e}_\varphi,\ \vec{V}_2=\vec{V}_m^{(2)}=J_m^{'}(\lambda\rho)\vec{e}_\rho+\frac{im}{\lambda\rho}J_m(\lambda\rho)\vec{e}_\varphi; \tag{4}$$

$\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z$ – орты цилиндрической системы координат [9, с. 34], $\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$, $\mu=\mu_r\mu_0$, $G=G_r\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, $Z=Z_r\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, $l_j=\dfrac{v_j}{k_j}$, $q_j=\dfrac{g}{k_j g_j}$, $g=\varepsilon_r\mu_r-Z_rG_r$, $g_j=f_j-\dfrac{1}{2}a$, $a=i(G_r-Z_r)$, $f_j=(-1)^j f$, $j=1,2$;

$f=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r-\dfrac{1}{4}(G_r+Z_r)^2}$, $0\le\arg f<\pi$,

$p_j=\dfrac{1}{\mu_r}\left(i\dfrac{g}{g_j}-Z_r\right)$, $\xi_0=\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$,

$k_j=\sqrt{g+\dfrac{1}{2}a^2+af_j}$, $0\le\arg k_j<\pi$,

$v_j=\sqrt{\bar{\lambda}^2-k_j^2}$, $-\dfrac{\pi}{2}\le\arg v_j<\dfrac{\pi}{2}$, $\lambda=k_0\bar{\lambda}$, $k_0=\dfrac{\omega}{c}$, c – скорость света.

Касательные составляющие $\vec{A}_\tau=\left[\vec{n}\left[\vec{A},\vec{n}\right]\right]$, $\vec{n}=\vec{e}_z$, на плоскостях $z=\mathrm{const}$ для полей (3) в базисе (4) имеют вид

$$\vec{K}_{m\tau}^{(\mp j)}=\left(\mp l_j\vec{V}_m^{(2)}-q_j\vec{V}_m^{(1)}\right)F_j(\mp z)\Phi_m, \tag{5}$$

где $\Phi_m=\exp(im\varphi)$, $F_j(\mp z)=\exp(\mp k_0 v_j z)$.

2. Краевая задача дифракции для слоя из композитного материала. В пространстве R^3 с декартовой системой координат $Oxyz$, заполненном средой с параметрами ε_0,μ_0, поместим композитный слой $D(0<z<\Delta,-\infty<x,y<\infty)$, определяемый параметрами среды ε,μ,G,Z. В полупространстве $D_1(z<0,-\infty<x,y<\infty)$ источник поля излучает первичное электромагнитное поле $\vec{E}_0,\vec{H}_0$. Обозначим: $\vec{E}_2,\vec{H}_2$ – поле, прошедшее в область $D_2(z>\Delta,-\infty<x,y<\infty)$; $\vec{E}_1^{'},\vec{H}_1^{'}$ – отраженное поле в D_1; $\vec{E}_1=\vec{E}_0+\vec{E}_1^{'},\vec{H}_1=\vec{H}_0+\vec{H}_1^{'}$ – суммарное поле в D_1; $\vec{E},\vec{H}$ – поле в слое D.

Краевая задача 1. Требуется при заданном поле $\vec{E}_0,\vec{H}_0$ определить поля $\vec{E}_1^{'},\vec{H}_1^{'}\in C^1(D_1)\cap C(\bar{D}_1)$, $\vec{E}_2,\vec{H}_2\in C^1(D_2)\cap C(\bar{D}_2)$, $\vec{E},\vec{H}\in C^1(D)\cap C(\bar{D})$, которые удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\begin{gathered}\mathrm{rot}\,\vec{E}_1^{'}=i\omega\mu_0\vec{H}_1^{'},\ \mathrm{rot}\,\vec{H}_1^{'}=-i\omega\varepsilon_0\vec{E}_1^{'},\ z<0,\\ \mathrm{rot}\,\vec{E}_2=i\omega\mu_0\vec{H}_2,\ \mathrm{rot}\,\vec{H}_2=-i\omega\varepsilon_0\vec{E}_2,\ z>\Delta,\\ \mathrm{rot}\,\vec{E}=i\omega\left(\mu\vec{H}+Z\vec{E}\right),\ \mathrm{rot}\,\vec{H}=-i\omega\left(\varepsilon\vec{E}+G\vec{H}\right),\ 0<z<\Delta,\end{gathered} \tag{6}$$

граничным условиям на плоскостях $\Gamma_1(z=0)$, $\Gamma_2(z=\Delta)$

$$\begin{gathered}\vec{E}_{1\tau}\big|_{\Gamma_1}=\vec{E}_\tau\big|_{\Gamma_1},\ \vec{H}_{1\tau}\big|_{\Gamma_1}=\vec{H}_\tau\big|_{\Gamma_1},\\ \vec{E}_{2\tau}\big|_{\Gamma_2}=\vec{E}_\tau\big|_{\Gamma_2},\ \vec{H}_{2\tau}\big|_{\Gamma_2}=\vec{H}_\tau\big|_{\Gamma_2},\end{gathered} \tag{7}$$

и условиям излучения для полей $\vec{E}_1^{'},\vec{H}_1^{'}$ при $z\to-\infty$ и для полей $\vec{E}_2,\vec{H}_2$ при $z\to+\infty$.

В дальнейшем рассмотрим случай задачи (6), (7), когда электромагнитные поля в областях D_j, D имеют специальную зависимость от азимутального угла φ:

$$\vec{E} = \vec{E}_m(\rho, z)e^{im\varphi}, \ \vec{H} = \vec{H}_m(\rho, z)e^{im\varphi}. \tag{8}$$

Для полей такого типа задача (6), (7) может быть сформулирована в специальном виде.

3. Представление полей в слое D. В случае, когда первичное поле имеет структуру (8), электромагнитное поле в слое D также имеет аналогичную структуру. Для рассматриваемой композитной среды поля вида (8) определяются выражениями (2) с различными постоянными λ. В дальнейшем рассмотрим поля с фиксированным λ. Поле общего вида является линейной комбинацией базисных полей (2):

$$\vec{E} = a_1\vec{K}_m^{(+1)} + a_2\vec{K}_m^{(-1)} + a_3\vec{K}_m^{(+2)} + a_4\vec{K}_m^{(-2)}, \tag{9}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\xi_0}\left(a_1 p_1\vec{K}_m^{(+1)} + a_2 p_1\vec{K}_m^{(-1)} + a_3 p_2\vec{K}_m^{(+2)} + a_4 p_2\vec{K}_m^{(-2)}\right).$$

Вычислим касательные составляющие полей (9), учитывая (5), тогда

$$\vec{E}_\tau(z) = -\left(a_1q_1F_1(z) + a_2q_1F_1(-z) + a_3q_2F_2(z) - a_4q_2F_2(-z)\right)\Phi\vec{V}_m^{(1)} +$$
$$\left(a_1l_1F_1(z) - a_2l_1F_1(-z) + a_3l_2F_2(z) - a_4l_2F_2(-z)\right)\Phi\vec{V}_m^{(2)} = E_{V_1}(z)\vec{V}_m^{(1)} + E_{V_2}(z)\vec{V}_m^{(2)}, \tag{10}$$
$$\vec{H}_\tau(z) = -\frac{1}{\xi_0}\left(a_1q_1p_1F_1(z) + a_2q_1p_1F_1(-z) + a_3q_2p_2F_2(z) + a_4q_2p_2F_2(-z)\right)\Phi\vec{V}_m^{(1)} +$$
$$\frac{1}{\xi_0}\left(a_1l_1p_1F_1(z) - a_2l_1p_1F_1(-z) + a_3l_2p_2F_2(z) - a_4l_2p_2F_2(-z)\right)\Phi\vec{V}_m^{(2)} = H_{V_1}(z)\vec{V}_m^{(1)} + H_{V_2}(z)\vec{V}_m^{(2)}.$$

Рассмотрим выражения (10) на плоскости $\Gamma_1(z=0)$, воспользуемся граничными условиями (7) и приравняем коэффициенты при векторах $\vec{V}_m^{(1)}$, $\vec{V}_m^{(2)}$. Получим систему уравнений

$$a_1q_1 + a_2q_1 + a_3q_2 + a_4q_2 = -E_{1V_1}(0)/\Phi,$$
$$a_1l_1 - a_2l_1 + a_3l_2 - a_4l_2 = E_{1V_2}(0)/\Phi, \tag{11}$$
$$a_1q_1p_1 + a_2q_1p_1 + a_3q_2p_2 + a_4q_2p_2 = -\xi_0 H_{1V_1}(0)/\Phi,$$
$$a_1l_1p_1 - a_2l_1p_1 + a_3l_2p_2 - a_4l_2p_2 = \xi_0 H_{1V_2}(0)/\Phi,$$

где

$$\vec{E}_{1\tau}\Big|_{z=0} = E_{1V_1}(0)\vec{V}_m^{(1)} + E_{1V_2}(0)\vec{V}_m^{(2)}, \ \vec{H}_{1\tau}\Big|_{z=0} = H_{1V_1}(0)\vec{V}_m^{(1)} + H_{1V_2}(0)\vec{V}_m^{(2)}. \tag{12}$$

Разрешим систему уравнений (11) относительно a_s, получим

$$a_1 = \frac{p}{2\Phi}\left[\frac{1}{q_1}\left(p_2E_{1V_1} - \xi_0H_{1V_1}\right) - \frac{1}{l_1}\left(p_2E_{1V_2} - \xi_0H_{1V_2}\right)\right],$$
$$a_2 = \frac{p}{2\Phi}\left[\frac{1}{q_1}\left(p_2E_{1V_1} - \xi_0H_{1V_1}\right) + \frac{1}{l_1}\left(p_2E_{1V_2} - \xi_0H_{1V_2}\right)\right], \tag{13}$$
$$a_3 = \frac{p}{2\Phi}\left[\frac{1}{q_2}\left(\xi_0H_{1V_1} - p_1E_{1V_1}\right) - \frac{1}{l_2}\left(\xi_0H_{1V_2} - p_1E_{1V_2}\right)\right],$$
$$a_4 = \frac{p}{2\Phi}\left[\frac{1}{q_2}\left(\xi_0H_{1V_1} - p_1E_{1V_1}\right) + \frac{1}{l_2}\left(\xi_0H_{1V_2} - p_1E_{1V_2}\right)\right],$$

где $p = \dfrac{1}{p_1 - p_2} = \dfrac{i\mu_r}{2f}$.

После подстановки коэффициентов (13) в (10) получим представление касательных составляющих полей $\vec{E}, \vec{H}$ во внутренних точках слоя $D(0 < z < \Delta)$ через значения полей на плоскости Γ_1.

4. Двухсторонние граничные условия на слое. Представляют интерес граничные условия, связывающие электромагнитные поля по обе стороны плоского слоя. Для моделирования граничных условий в случае электромагнитных полей с осевой симметрией представим касательные составляющие полей в базисе (4):

$$\vec{E}_\tau = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y = E_{V_1}\vec{V}_1 + E_{V_2}\vec{V}_2,\ \vec{H}_\tau = H_x\vec{e}_x + H_y\vec{e}_y = H_{V_1}\vec{V}_1 + H_{V_2}\vec{V}_2. \quad (14)$$

Введем вспомогательные векторы-столбцы

$$\vec{E}_j^V = \begin{pmatrix} E_{jV_1} \\ E_{jV_2} \end{pmatrix},\ \vec{H}_j^V = \begin{pmatrix} H_{jV_1} \\ H_{jV_2} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

соответствующие полям (14).

Построим граничные условия, связывающие векторы (15) по обе стороны плоского слоя D.

Т е о р е м а. *Для электромагнитных полей вида* (8), *представленных через базисные поля* (4) *при фиксированных m и λ имеют место граничные условия, связывающие поля $\vec{E}_j^V, \vec{H}_j^V$ по обе стороны слоя D,*

$$\begin{aligned}
E_{2V_1}\big|_{\Gamma_2} &= \left(A_{11}^{11}E_{1V_1} + A_{11}^{12}E_{1V_2} + A_{12}^{11}H_{1V_1} + A_{12}^{12}H_{1V_2}\right)\Big|_{\Gamma_1}, \\
E_{2V_2}\big|_{\Gamma_2} &= \left(A_{11}^{21}E_{1V_1} + A_{11}^{22}E_{1V_2} + A_{12}^{21}H_{1V_1} + A_{12}^{22}H_{1V_2}\right)\Big|_{\Gamma_1}, \\
H_{2V_1}\big|_{\Gamma_2} &= \left(A_{21}^{11}E_{1V_1} + A_{21}^{12}E_{1V_2} + A_{22}^{11}H_{1V_1} + A_{22}^{12}H_{1V_2}\right)\Big|_{\Gamma_1}, \\
H_{2V_2}\big|_{\Gamma_2} &= \left(A_{21}^{21}E_{1V_1} + A_{21}^{22}E_{1V_2} + A_{22}^{21}H_{1V_1} + A_{22}^{22}H_{1V_2}\right)\Big|_{\Gamma_1}
\end{aligned} \quad (17)$$

или в матричном виде для векторов (15)

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{2\tau}^V(M_2) &= \hat{A}_{11}\vec{E}_{1\tau}^V(M_1) + \hat{A}_{12}\vec{H}_{1\tau}^V(M_1), \\
\vec{H}_{2\tau}^V(M_2) &= \hat{A}_{21}\vec{E}_{1\tau}^V(M_1) + \hat{A}_{22}\vec{H}_{1\tau}^V(M_1),
\end{aligned} \quad (18)$$

где точки $M_1(x,y,0) \in \Gamma_1$, $M_2(x,y,\Delta) \in \Gamma_2$,

$$A_{11}^{11} = p\left(p_1C_2 - p_2C_1\right),\ A_{11}^{12} = p\left(p_2\frac{q_1}{l_1}S_1 - p_1\frac{q_2}{l_2}S_2\right),$$

$$A_{11}^{21} = p\left(p_2\frac{l_1}{q_1}S_1 - p_1\frac{l_2}{q_2}S_2\right),\ A_{11}^{22} = p\left(p_1C_2 - p_2C_1\right),$$

$$A_{12}^{11} = \xi_0 p\left(C_1 - C_2\right),\ A_{12}^{12} = \xi_0 p\left(\frac{q_2}{l_2}S_2 - \frac{q_1}{l_1}S_1\right),$$

$$A_{12}^{21} = \xi_0 p\left(\frac{l_2}{q_2}S_2 - \frac{l_1}{q_1}S_1\right),\ A_{12}^{22} = \xi_0 p\left(C_1 - C_2\right),$$

$$A_{21}^{11} = pp_1p_2\left(C_2 - C_1\right)/\xi_0,\ A_{21}^{12} = pp_1p_2\left(\frac{q_1}{l_1}S_1 - \frac{q_2}{l_2}S_2\right)\Big/\xi_0,$$

$$A_{21}^{21} = pp_1p_2\left(\frac{l_1}{q_1}S_1 - \frac{l_2}{q_2}S_2\right)\Big/\xi_0,\ A_{21}^{22} = pp_1p_2\left(C_2 - C_1\right)/\xi_0,$$

$$A_{22}^{11} = p\left(p_1C_1 - p_2C_2\right),\ A_{22}^{12} = p\left(p_2\frac{q_2}{l_2}S_2 - p_1\frac{q_1}{l_1}S_1\right),$$

$$A_{22}^{21} = p\left(p_2\frac{l_2}{q_2}S_2 - p_1\frac{l_1}{q_1}S_1\right),\ A_{22}^{22} = p\left(p_1C_1 - p_2C_2\right),\ C_j = \operatorname{ch}\left(k_0\nu_j\Delta\right),\ S_j = \operatorname{sh}\left(k_0\nu_j\Delta\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенства (10) запишем покомпонентно на плоскости $\Gamma_2(z=\Delta)$. Учитывая граничные условия (7) на Γ_2, перейдем к внешним полям $\vec{E}_2, \vec{H}_2$. Тогда

$$\begin{aligned} E_{2V_1}(\Delta) &= -\left(a_1 q_1 F_1(\Delta) + a_2 q_1 F_1(-\Delta) + a_3 q_2 F_2(\Delta) - a_4 q_2 F(-\Delta)\right)\Phi, \\ E_{2V_2}(\Delta) &= \left(a_1 l_1 F_1(\Delta) - a_2 l_1 F_1(-\Delta) + a_3 l_2 F_2(\Delta) - a_4 l_2 F_2(-\Delta)\right)\Phi, \\ H_{2V_1}(\Delta) &= -\frac{1}{\xi_0}\left[q_1 p_1\left(a_1 F_1(\Delta) + a_2 F_1(-\Delta)\right) + q_2 p_2\left(a_3 F_2(\Delta) + a_4 F\ (-\Delta)\right)\right]\Phi, \\ H_{2V_2}(\Delta) &= \frac{1}{\xi_0}\left[l_1 p_1\left(a_1 F_1(\Delta) - a_2 F_1(-\Delta)\right) + l_2 p_2\left(a_3 F_2(\Delta) - a_4 F(-\Delta)\right)\right]\Phi. \end{aligned} \tag{19}$$

Подставим формулы (13) в соотношения (19). После соответствующих перегруппировок слагаемых получим граничные соотношения (17).

5. Двухобластная краевая задача дифракции. В п. 2 была сформулирована трехобластная краевая задача 1 распространения электромагнитных волн в трех областях D_1, D, D_2, заполненных различными средами.

Для электромагнитных волн с осевой симметрией в п. 4 получены граничные условия специального вида, связывающие поля по обе стороны слоя D. Это позволяет сформулировать двухобластную краевую задачу 2 для областей D_1 и D_2, электродинамически эквивалентную задаче 1 для электромагнитных волн с осевой симметрией.

Краевая задача 2. Требуется при заданном поле $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ вида (8) в базисе (4) определить поля $\vec{E}_1^{'}, \vec{H}_1^{'} \in C^1(D_1) \cap C(\bar{D}_1)$, $\vec{E}_2, \vec{H}_2 \in C^1(D_2) \cap C(\bar{D}_2)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot}\vec{E}_j = i\omega\mu_0 \vec{H}_j, \ \operatorname{rot}\vec{H}_j = -i\omega\varepsilon_0 \vec{E}_j \ \text{ в } D_j,$$

граничным условиям (17) и условиям на бесконечности при $z \to \pm\infty$.

Такая модель краевой задачи позволяет эффективно решать задачи проникновения электромагнитных полей диполей, квадруполей и других источников через композитные экраны.

Литература

1. М и т р а Р. // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52, № 9. С. 1051–1058.
2. С и х в о л а А., Т р е т ь я к о в С. А., Д е Б а а с А. // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52, № 9. С. 1066–1071.
3. Н е г а н о в В. А., О с и п о в О. В. // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2005. Т. 8, № 1. С. 7–32.
4. Х а л и у л л и н Д. Я., Т р е т ь я к о в С. А. // Радиотехника и электроника. 1998. Т. 43, № 1. С. 16–29.
5. Т р е т ь я к о в С. А. // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39, № 10. С. 1457–1470.
6. А п о л л о н с к и й С. М., Е р о ф е е н к о В. Т. Эквивалентные граничные условия в электродинамике. СПб., 1998.
7. Е р о ф е е н к о В. Т., Т а в а к к о л и Д. П. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2008. № 1. С. 49–55.
8. Е р о ф е е н к о В. Т., Т а в а к к о л и Д. П. // Вестн. БГУ. Сер. 1: Физ. Мат. Информ. 2007. № 2. С. 56–60.
9. Е р о ф е е н к о В. Т., К о з л о в с к а я И. С. Математические модели в электродинамике. Минск, 2008.

V. T. EROFEENKO

MODELING BOUNDARY CONDITIONS ON COMPOSITE SCREENS FOR ELECTROMAGNETIC FIELDS OF AXIAL SYMMETRY

Summary

Bilaterial boundary conditions linking electromagnetic fields on the both sides of a biisotropic plane layer are developed. Boundary conditions for cylindrical fields with a harmonic dependence on the azimuth angle are obtained. Boundary relations are presented by cylindrical coordinates in a special basis, and can be used for solving boundary-value problems of mathematical physics.